Paskaita 4

Minimizavimo uždaviniai su lygybių tipo apribojimais sprendimas

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) \to \min \\ g_j(X) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1)$$

(Čia faktiškai papildomi kintamieji gali būti nagrinėjami, kaip įtraukti į didesnės dimensijos vektorių).

Siekdami taupesnio žymėjimo leistinų taškų aibę žymėsime X:

$$X = \{ x : \; g_j(x) = 0, \; j = 1, \dots, m \}$$

Priminsime, kad uždavinys

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in X \end{cases}$$

yra absoliutaus sąlyginio minimumo uždavinys,

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in X, \; \|x - x^*\| \le \varepsilon \end{cases}$$

yra lokalaus sąlyginio minimumo uždavinys (prisiminkite lokaliojo ir globaliojo minimumų).

Sprendimo metodai

Kai kada pavyksta iš m apribojimų

$$g_j(x) = 0 \quad , j = 1, \dots, m$$

išreikšti m nežinomųjų, tegul jie

žymimi : $x_1, x_2, \dots, x_m$

$$x_j = h_j(x_{m+1}, \dots, x_n) \quad , j = 1, \dots, m.$$

Tada gauname nesąlyginį minimumo uždavinį

$$(2) \quad \varphi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \to \min$$

$$(x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$\varphi = f(h_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, h_m(x_{m+1}, \dots, x_n),$$

$$x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Nesunku įrodyti, kad sąlyginis minimumo uždavinys (1) yra ekvivalentus uždaviniui (2).

Bendras (universalus) metodas gaunamas Lagranžo daugiklių metodu

Sudarome funkciją

$$F(x,\lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x),$$

čia $x = (x_1, \dots, x_n)$ nepriklausomų kintamųjų vektorius

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ – Lagranžo daugikliai

Dažnai naudojame apribojimų funkcijų vektorių $g = (g_1, \dots, g_m)$.

Ši funkcija $F(x, \lambda)$ ir yra tas šablonas, kuris leidžia labai patogiai suformuluoti uždavinį, kurį sprendžiame norėdami gauti $f = f(x_1, \dots, x_m)$ ekstremumus, esant apribojimams

Teorema 1. Tegul $f(x)$, $g_j(x)$, $j=1,\dots,m$ yra tolydžios ir diferencijuojamos funkcijos $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Jeigu x^0 yra lokalaus sąlyginio minimumo taškas (aplinkoje $\|x-x^0\| \le \varepsilon$, $x \in X$), tai $\exists!$ nenulinis vektorius $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, toks $\bar{\lambda}$, kad galioja $(\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_m))$:

$$\frac{\partial F(x^0,\bar{\lambda})}{\partial x} = 0,$$

čia pažymėjome vektorių (stulpelį)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{\partial F(x^0,\bar{\lambda})}{\partial x_k} = 0, \quad k=1,\dots,n \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x^0)}{\partial x} = 0 \qquad \lambda \neq 0.}$$

Esant apribojimams:

$$g_j(x^0) = 0, \quad j=1,\dots,m.$$

Tašką $\tilde{x} \in X$ vadinsime <u>paprastu leistinu</u> tašku, jei

1) $g_j(\tilde{x}) = 0$, $j = 1, \dots, m$ (t.y. $\tilde{x} \in X$)

2) Vektoriai (stulpeliai) $\frac{\partial g_1(\tilde{x})}{\partial x}, \dots, \frac{\partial g_m(\tilde{x})}{\partial x}$, apskaičiuoti šiame taške yra tiesiškai nepriklausomi.

Mus domins uždaviniai, kai lokalaus minimumo taškas x^0 yra paprastas leistinas sprendinys

<u>Pastaba</u>: Tokio sprendinio egzistavimas priklauso tik nuo apribojimų aibės $g(x)$. Taigi gauname $n+m$ lygčių sistemą ir randame $n+m$ nežinomųjų

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F(x^0, \lambda)}{\partial x} = 0 & (n\text{- lygčių}) \\
\dfrac{\partial F(x^0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 & (m\text{- lygčių } g_j(x^0) = 0)
\end{cases}
$$

Lagranžo f-jos sudarymo idėją iliustruosime $m=1$ atvejo pavyzdžiu, pateiktu iš Wiki straipsnyje

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g_1(x_1, x_2).$$

Pastebėsime, kad sąlyginio lokalaus minimumo taškas x^0 nebūtinai yra ir sudarytosios Lagranžo funkcijos ekstremumo tašku, bet jis visada yra šios funkcijos balno taškas.

Pastebėsime, kad sąlyginio minimumo taškas x^0 nebūtinai yra Lagranžo f-jos minimumo taškas. Tačiau jis visada yra Lang f-jos balno taškas.

Pav. 1. $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $m = 1$.

$$f(x) = x_2$$

$$g(x) = x_2 - x^2$$

Parametrizuojame $g(x_1, x_2) = 0$.

$$g(x) = 0 \Rightarrow x_2 = x_1^2$$

stacionarus t

$$f(x) = x_1^2 \Rightarrow x_1^0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

Taigi lokalusis minimumo taškas $x^0 = (0, 0)$.

Lagranžo metodas

$$F(x, \lambda) = x_2 + \lambda (x_2 - x_1^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} := \boxed{-2\lambda x_1 = 0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} := \boxed{\lambda + 1 = 0} \Rightarrow \lambda = -1.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

$F(x, -1) = x_1^2$ ir gi pasiekia minimumą taške $x_1 = 0$.

Pav. 2 $\quad n=2,\ m=1$ (pakeičiame tik $f(x)$)

$$f(x)=x_2^3, \quad g(x)=x_2-x_1^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}=-2x_1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}=1, \quad \text{taigi}$$

$\dfrac{\partial g}{\partial x} \neq 0$ ir bet kuris leistinas taškas $x \in X$ yra paprastasis

$$F(x,\lambda)=x_2^3+\lambda(x_2-x_1^2)$$

Daugiklių taisyklė:

$$\begin{cases} -2x_1\lambda=0 \\ 3x_2^2+\lambda=0 \\ x_2-x_1^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \lambda=0. \end{cases} \Rightarrow x^0=(0,0)$$

$F(x,0)=x_2^3$ nepasiekia minimalios reikšmės taške $x_2=0$

Panašiai, kaip ir $n=1$ atveju, kai $f'(x)=0$ yra tik būtinoji ekstremumo sąlyga (bet ekstremumas gali būti ir max taškas), Lagranžo daugiklių taisyklė negarantuoja, jog iš sistemos rasime minimumo tašką

Pav. 3 $\quad n=2, \quad m=1.$

$$f(x) = -x_2^2, \quad g(x) = x_2$$

$$F(x, \lambda) = -x_2^2 + \lambda x_2$$

Gauname sistemą

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad \begin{cases} -2x_2 + \lambda = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x_2 = 0, \quad \lambda = 0}$$

$F(x, 0) = -x_2^2$ ir taške $x_2 = 0$

funkcija pasiekia maksimumą